Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $\mathrm{I} =]0\ ;\ +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 2\ln x$

1. Étudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variations.

   On a : $g'(x) = 2x - \dfrac{2}{x} = 2\dfrac{x^2-1}{x^2} = \dfrac{2(x-1)(x+1)}{x^2}$

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$+$		$+$	
x^2	0	$+$		$+$	
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	$\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$	

2. En déduire que pour tout nombre réel x strictement positif : $g(x) > 0$.

   D'après ce qui précède g admet un minimum en 1 or $g(1) = 1$ donc g reste toujours strictement positive sur $=]0\ ;\ +\infty[$

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle I par : $f(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2} + \dfrac{1+\ln x}{x}$

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. (a) Étudier la limite de f en 0 et en déduire l'existence d'une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.

   On a : $\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = -\infty$ donc $x = 0$ est l'équation d'un asymptote verticale à la courbe $(\mathcal{C})$

   (b) En remarquant que $f(x)$ peut s'écrire : $f(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x}$ étudier la limite de f en $+\infty$.

   Puisque $f(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2. (a) Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle I, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x^2}$.

   $$f'(x) = \frac{1}{2} - 0 + \frac{(0+\frac{1}{x}) \times x - (1+\ln x)\times 1}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{1-1-\ln x}{2x^2} = \frac{x^2 - 2\ln x}{2x^2} = \frac{g(x)}{2x^2}$$

   (b) Déduire de la Partie A le signe de $f'(x)$, puis le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle I.

   D'après la partie A, g est positive et $x^2 > 0$ donc f' reste positive sur I

(c) Dresser le tableau de variations de f.

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$f(x)$	$\|\|$ 0	$\nearrow$	$+\infty$

3. Soit (D) la droite d'équation : $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}$. Montrer que la droite (D) est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.

   On étudie la différence $f(x) - y$

   Or $f(x) - y = \left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2} + \dfrac{1+\ln x}{x}\right) - \left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{1+\ln x}{x} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x}$

   et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - y = 0$ ce qui signifie que (D) est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$

   Dessiner la droite (D) et la courbe $(\mathcal{C})$ à l'aide d'un grapheur (ex : geogebra).