Un laboratoire propose un test de dépistage d'une nouvelle maladie, il revendique que :

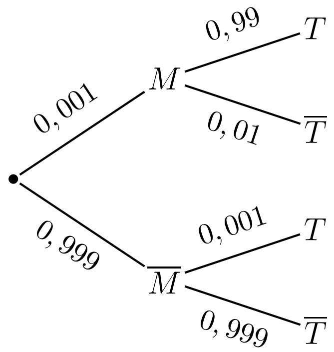
— la probabilité qu'une personne malade présente un test positif est $0,99$;

— la probabilité qu'une personne saine présente un test positif est $0,001$.

1. Une étude statistique affirme que 0,1 % de personnes sont malades dans une zone. On choisit au hasard une personne dans cette population et on lui fait subir le test.

   On note M l'évènement " la personne choisie est malade" et T l'évènement " le test est positif ".

   (a) Traduire l'énoncé sous la forme d'un arbre pondéré.

   (b) Démontrer que la probabilité $p(T)$ de l'évènement T est égale à $1,989 \times 10^{-3}$.

   D'après la loi des probabilités totales, les évènements M et $\overline{M}$ constituant une partition de l'univers (ou un système complet d'évènements) donc on a : $P(T) = P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap T\right) = 0,001 \times 0,99 + 0,999 \times 0,001$ donc $P(T) = 0,001 \times (0,99 + 0,999) = 1,989 \times 10^{-3}$

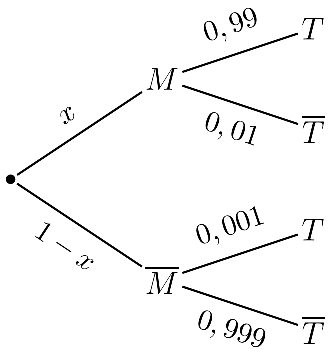
   (c) L'affirmation "Si le test est positif, il y a moins d'une chance sur deux que la personne soit malade" est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.

   On calcule la probabilité conditionnelle : $P_T(M) = \dfrac{P(T \cap M)}{P(T)} = \dfrac{0,001 \times 0,99}{1,989 \times 10^{-3}} = \dfrac{0,99}{0,99 + 0,999} \approx 0,498$. La probabilité est inférieure à 0,5 donc l'affirmation est correcte.

2. Le laboratoire décide de commercialiser un test dès lors que la probabilité qu'une personne testée positivement soit malade est supérieure ou égale à $0,95$. On désigne par x la proportion de personnes atteintes d'une certaine maladie dans la population.

   (a) En notant x, la probabilité qu'une personne soit malade, que devient l'arbre ?

   Cette fois on a :



   (b) Montrer que $P_T(M) = \dfrac{0,99x}{0,001+0,989x}$

   On a alors : $P(T) = 0,99x + 0,001 \times (1-x) = 0,001 + 0989x$

   On a donc $P_T(M) = \dfrac{0,99x}{0,001+0,989x}$.

   (c) Résoudre $P_T(M) \geqslant 0,95$ A partir de quelle valeur de x le laboratoire commercialise-t-il le test correspondant ?

   On résout l'inéquation suivante où $x \in [0;1]$:

$$\begin{aligned}
P_T(M) \geqslant 0,95 &\iff \frac{0,99x}{0,001+0,989x} \geqslant 0,95 \\
&\iff 0,99x \geqslant 0,95 \times (0,001+0,989x) \quad \text{car } 0,001+0,989x \geqslant 0. \\
&\iff 0,99x \geqslant 0,00095 + 0,93955x \\
&\iff 0,05045x \geqslant 0,00095 \\
&\iff x \geqslant \frac{0,00095}{0,05045} \quad \text{car } 0,05045 \text{ est positif.}
\end{aligned}$$

   Le test sera donc commercialisable à condition que la proportion x soit supérieure à $\dfrac{0,00095}{0,05045} = \dfrac{19}{1009} \approx 0,01883$, c'est à dire quand le pourcentage de la population atteint par la maladie est supérieur à environ 1,88%.