1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x + 1 > 0$.

   Son discriminant est $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ donc ce polynôme ne s'annule pas et garde un signe constant, en 0, il faut 1 donc ce polynôme est toujours strictement positif.

2. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 - x + 1)$ et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

   (a) Déterminer les intersections de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

   Ces intersections de $\mathcal{C}_f$ ont des abscisses qui vérifient : $f(x) = 0$, c'est à dire $\ln(x^2 - x + 1) = 0$

   puis $x^2 - x + 1 = 1$ en passant aux exponentielles de chaque côté du signe $=$

   puis $x^2 - x = 0$ c'est à dire $x(x-1) = 0$ donc $x0$ ou $x = 1$

   Il y a deux intersections de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses : en $A(0;0)$ et $B(1;0)$

   (b) En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

   On a : $\ln(x^2 - x + 1) > 0$ ssi $x^2 - x + 1 > 1$ ssi $x^2 - x > 0$

   D'après l'étude des trinômes du second degré, on aura : $x^2 - x > 0$ à l'extérieur du segment formé par ses racines.

   Ce qui signifie que $f(x) > 0$ pour $x < 0$ ou $x > 1$ et $f(x) < 0$ pour $x \in]0;1[$

   (c) Calculer $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de f.

   D'après le cours, on a : $f'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+1}$ donc $f'(x) = 0$ ssi $x = \dfrac{1}{2}$

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	
x^2-x+1		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(\frac{1}{2})$	$\nearrow$	

   (d) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

   $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ contient la forme indéterminée $\infty - \infty$ mais $x^2 - x + 1 = x(x-1) + 1$

   donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - x + 1 = +\infty$

or $\lim\limits_{u \to +\infty} \ln(u) == \infty$ donc par composition $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - x + 1 = +\infty$

or $\lim\limits_{u \to +\infty} \ln(u) = \infty$ donc par composition $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

(e) Montrer que $f(\frac{1}{2} + x) = f(\frac{1}{2} - x)$.

$f(\frac{1}{2} + x) = \ln((\frac{1}{2} + x)^2 - (\frac{1}{2} + x) + 1) = \ln(x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - x + 1) = \ln(x^2 + \frac{3}{4})$

$f(\frac{1}{2} - x) = \ln((\frac{1}{2} - x)^2 - (\frac{1}{2} - x) + 1) = \ln(x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + x + 1) = \ln(x^2 + \frac{3}{4})$

donc on a bien : $f(\frac{1}{2} + x) = f(\frac{1}{2} - x)$.

(f) En déduire que les points $M(\frac{1}{2}+x; f(\frac{1}{2}+x))$ et $N(\frac{1}{2}-x; f(\frac{1}{2}-1x))$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$. Que peut-on en conclure pour la courbe $\mathcal{C}_f$? Le milieu de $[MN]$ a pour abscisses $\dfrac{\frac{1}{2} + x \ + \ \frac{1}{2} - x}{2} = \frac{1}{2}$ donc il appartient à la droite (d) d'équation $x = \frac{1}{2}$

et le vecteur $\overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} -2x \\ 0 \end{pmatrix}$, il est bien orthogonal à la droite d'équation (d)

donc les points M et N sont symétriques par rapport à la droite (d)

La courbe $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite (d)

(g) Montrer que la surface comprise entre l'axe des abscisse et la courbe $\mathcal{C}_f$ pour x compris entre 0 et 1 est inférieure à $\dfrac{1}{3}$.

Sur l'intervalle $[0; 1]$, la fonction est négative donc la surface est l'opposée de l'aire.

Le tableau de variation nous apprend que $f(x)$ est compris entre 0 et $f(\frac{1}{2}) \approx -0,29$

donc l'aire est comprise entre 0 et -0,3.

donc la surface est comprise entre 0 et 0,3, elle est bien inférieure à $\frac{1}{3}$.