

On considère la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-x/2}(5x + 1)$.

1. Calculer les limites de $f(x)$ en $+$ et en $-$ l'infini.

On a : $f(x) = 5xe^{-x/2} + e^{-x/2}$ or $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5xe^{-x/2} = 0$ par croissances comparées (l'exponentielle l'emporte sur le polynôme au voisinage de l'infini) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x/2} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x/2} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x + 1) = -\infty$ donc par produit $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

2. Calculer la dérivée $f'(x)$ et établir le tableau des variations de f .

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \times e^{-x/2}(5x + 1) + e^{-x/2} \times 5 = \frac{e^{-x/2}}{2} \times \frac{-5x + 9}{2}$$

$e^{-x/2}$ reste positif. Par ailleurs $-5x + 9$ est affine décroissant et s'annule en $\frac{9}{5}$

donc le tableau de variation est le suivant :

x	0	1	$+\infty$
$\frac{1}{2}e^{-x/2}$	+		+
$-5x + 9$	+	0	-
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\frac{9}{5})$	0

3. Montrer que f admet un maximum dont on donnera la position et la valeur.

Puisque f est continue sur \mathbb{R} et strictement croissante sur $] -\infty; \frac{9}{5}[$ puis strictement décroissante sur $]\frac{9}{5}; +\infty[$;

f admet un maximum en $x = \frac{9}{5}$ dont la valeur est $f(\frac{9}{5}) = 10e^{10/9} \approx 4,01$

4. Démontrer que $f(x) = 3$ admet exactement deux solutions sur $[0; 10]$

f est continue sur $[0; \frac{9}{5}]$, dérivable sur $]0; \frac{9}{5}[$, $f(0) = 1 < 3$ et $f(\frac{9}{5}) \approx 4 > 3$ donc le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que $f(x) = 3$ admet une solution unique sur l'intervalle $[0; \frac{9}{5}]$

f est continue sur $[\frac{9}{5}; 10]$, dérivable sur $]\frac{9}{5}; 10[$, $f(\frac{9}{5}) \approx 4 > 3$ et $f(10) \approx 0,3$ donc le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que $f(x) = 3$ admet une solution unique sur l'intervalle $[\frac{9}{5}; 10]$

On a bien démontré que $f(x) = 3$ admet exactement deux solutions sur $[0; 10]$.

5. Déterminer les réels a et b pour que $F(x) = (ax + b)e^{-x/2}$ soit une primitive de f sur \mathbb{R}

F est une primitive de f si $F' = f$ or $F'(x) = ae^{-x/2} - \frac{1}{2}(ax + b)e^{-x/2} = \left(\frac{-ax + 2a - b}{2}\right) e^{-x/2}$

Or $f(x) = e^{-x/2}(5x + 1)$ donc il faut que $\frac{-ax + 2a - b}{2} = 5x + 1$ donc $-ax + 2a - b = 10x + 2$

donc $a = -10$ e $2a - b = 2$ donc $b = -22$

Finalement $F(x) = (-10x - 22)e^{-x/2}$

6. En déduire la valeur exacte de $\int_0^1 f(x)dx$

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx &= [F(x)]_0^1 \\ &= [(-10x - 22)e^{-x/2}]_0^1 \\ &= (-10 - 22)e^{-1/2} - (-22)e^0 \\ &= 22 - 32e^{-1/2} \approx 2,6\end{aligned}$$