A 23 heures, l'heure à laquelle se termine la représentation de Carmen, la diva reste un certain temps avant de quitter l'opéra. La variable aléatoire T égale au temps (exprimé en heures), qu'elle met pour quitter l'opéra suit une loi exponentielle de paramètre $1/13$.

1. (a) Calculer la probabilité qu'elle sorte avant minuit.

   $P(T < 1) = 1 - e^{-\lambda \times 1} \approx 0,074$

   (b) Calculer la probabilité qu'elle sorte avant une heure du matin, sachant qu'elle est sortie après minuit.

   On calcule directement

   $P_{T>1}(T < 2) = \dfrac{P(1 < T < 2)}{P(T > 1)}$
   $= \dfrac{P(T < 2) - P(T < 1)}{P(T > 1)}$
   $= \dfrac{(1 - e^{-\lambda \times 2}) - (1 - e^{-\lambda \times 1})}{(e^{-\lambda \times 1})}$
   $\approx 0,074$

   ou bien on utilise la propriété "sans effet mémoire"

   $P_{T>a}(T < a + h) = \dfrac{P(a < T < a + h)}{P(T > a)}$
   $= \dfrac{1 - e^{-\lambda(a+h)} - 1 + e^{-\lambda a}}{e^{-\lambda a}}$
   $= \dfrac{e^{-\lambda a} - e^{-\lambda(a+h)}}{e^{-\lambda a}}$
   $= 1 - e^{-\lambda h}$
   $= P(T < h)$

2. Après chaque représentation, un admirateur attend la diva pour lui offrir des roses. Si elle sort avant minuit, il rentre chez lui en métro. Sinon il doit prendre un taxi. Durant toute une saison, Carmen est à l'affiche pour une série de 15 représentations. On note X la variable aléatoire égale au nombre de jours où l'admirateur rentre chez lui en métro. Indiquer la loi de X.

   On répète l'épreuve de Bernoulli : "métro ou pas", de paramètre $p = 0,074$, de façon indépendante, $n = 15$ fois et X compte le ombre de succès donc X soit la loi binomiale $\mathcal{B}(n = 15; p = 0,074)$

3. Calculer la probabilité que l'admirateur rentre au moins deux fois chez lui en métro.

   A la calculatrice, $P(X = 2) \approx 21,2\%$

4. Calculer $E(X)$.

   pour une loi binomiale $\mathcal{B}(n = 15; p = 0,074)$ l'espérance $E(x) = n \times p \approx 1,11$, il rentrera environ une fois en métro.