On considère la fonction f définie sur $I =]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3\ln(x)-2}{x}$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0_+} f(x)$.

   On a : $f(x) = 3\dfrac{3\ln(x)}{x} - \dfrac{2}{x}$ or le cours nous apprend que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3\ln(x)}{x} = 0$ (croissances comparées de ln par rapport à celle de x au voisinage de $+\infty$) donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3\times 0 - 0 = 0$

   On a : $f(x) = (\dfrac{3}{x} - 2)\times\ln(x) - \dfrac{2}{x}$ or $\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{3}{x} - 2 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0_+} \ln x = -\infty$

   donc $\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = -\infty$

2. Montrer que $f'(x) = \dfrac{5-3\ln(x)}{x^2}$.

   On a : $f(x) = \dfrac{3\ln(x)-2}{x}$ donc $f'(x) = \dfrac{\frac{3}{x}\times x - (3\ln(x)-2)\times 1}{x^2} = \dfrac{3-3\ln(x)+2}{x^2} = \dfrac{5-3\ln(x)}{x^2}$

3. Établir une équation de la tangente à la courbe représentant f en $x = 1$.

   La tangente a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ or $f'(1) = 5$ et $f(1) = -2$

   donc $y = 5(x-1) - 2 = 5x - 5 - 2$ donc $y = 5x - 7$

4. Étudier le signe de la dérivée. Construire le tableau de variation de f.

   $f'(x) = \dfrac{5-3\ln(x)}{x^2}$ or $5 - 3\ln x = 0$ pour $\ln x = \frac{5}{3}$ donc pour $x = e^{5/3} \approx 5,3$

   Par ailleurs $5 - 3\ln x$ a pour dérivée $-\frac{3}{x}$ qui est négatif sur $I =]0;+\infty[$, donc cette fonction est décroissante.

   On a alors :

x	0		$e^{5/3}$		$+\infty$
$5-3\ln x$	||	$+$	0	$-$	
x	||	$+$		$+$	
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(e^{5/3})$	$\searrow$	0

5. Montrer que f admet un maximum relatif. Donner sa valeur et sa position.

   Puisque f est continue sur $\mathbb{R}_*^+$, et strictement croissante sur $]0;e^{5/3}[$ puis strictement décroissante sur $]e^{5/3};+\infty[$, la fonction f admet bien un maximum local en $x = e^{5/3} \approx 5,3$ dont la valeur est $f(e^{5/3}) = \dfrac{3}{e^{5/3}} \approx 0,57$

6. Montrer que l'équation $f(x) = 0,5$ admet exactement deux solutions sur $[1;10]$.

f est continue sur $\mathbb{R}_*^+$, et strictement croissante sur $[1;e^{5/3}[$ or $f(1) = -2 < 0,5$ et $f(e^{5/3}) \approx 0,57 > 0,5$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (aussi appelé théorème de la bijection), l'équation $f(x) = 0,5$ admet sur $]1;e^{5/3}[$ une solution unique.

f est continue sur $\mathbb{R}_*^+$, et strictement croissante sur $[e^{5/3};10[$ or $f(e^{5/3}) \approx 0,57 > 0,5$ et $f(10) \approx 0,49$¡0,5, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (aussi appelé théorème de la bijection), l'équation $f(x) = 0,5$ admet sur $]e^{5/3};10[$ une solution unique.

Finalement l'équation $f(x) = 0,5$ admet exactement deux solutions sur $[1;10]$

7. En écrivant $f(x) = 3\ln(x) \times \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x}$ déterminer une primitive de f.

Puisque $f(x) = 3\ln(x) \times \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x}$ on peut reconnaître dans $\ln(x) \times \dfrac{1}{x}$ la forme uu' qui a pour primitive $\frac{1}{2}u^2$

par ailleurs $\dfrac{2}{x} = 2 \times \dfrac{1}{x}$ a pour primitives $2\ln(x)$

donc une primitive de f est alors $F(x) = 3\dfrac{(\ln(n))^2}{2} - 2\ln(x)$

8. On admet que $F(x) = \dfrac{1}{6}(3\ln x - 2)^2$ est une primitive de f. Calculer $\displaystyle\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

$$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_1^2 = \left[\frac{1}{6}(3\ln x - 2)^2\right]_1^2 = \frac{1}{6}(3\ln 2 - 2)^2 - \frac{1}{6}(-2)^2 \approx -0,67$$