EXERCICE 1

On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par : $U_0 = 4$ et $U_{n+1} = \dfrac{4U_n - 1}{U_n + 2}$

On veut démontrer par récurrence que $U_n > 1$ pour tout $n > 0$; pour cela on considère la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{4x - 1}{x + 2}$

1. Déterminer la dérivée f' de f et déterminer son signe sur $[1; +\infty[$.
2. En déduire les variations de f sur $[1; +\infty[$.
3. En déduire que si $x > 1$ alors $f(x) > 1$.
4. En utilisant les résultats précédents, démontrer par récurrence que $U_n > 1$.

EXERCICE 2

Démontrer par récurrence que la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $V_1 = 1$ et $V_{n+1} = \dfrac{V_n}{\sqrt{V_n^2 + 1}}$ vérifie $V_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$