EXERCICE 1

On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par : $U_0 = 4$ et $U_{n+1} = \dfrac{4U_n - 1}{U_n + 2}$
On veut démontrer par récurrence que $U_n > 1$ pour tout $n > 0$; pour cela on considère la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$

1. Déterminer la dérivée f' de f et déterminer son signe sur $[1; +\infty[$.

   On a : $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$ donc $f'(x) = \dfrac{4(x+2) - (4x-1)}{(x+2)^2} = \dfrac{9}{(x+2)^2} > 0$

2. En déduire les variations de f sur $[1; +\infty[$.

   Puisque $f'(x) > 0$ sur $[1; +\infty[$, la fonction f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$

3. En déduire que si $x > 1$ alors $f(x) > 1$.

   On a : $f(1) = 1$ et la fonction f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$ donc pour tout $x > 1$, on a $f(x) > f(1)$ c'est à dire $f(x) > 1$

4. En utilisant les résultats précédents, démontrer par récurrence que $U_n > 1$.

   Soit $\mathscr{H}_n$ la proposition "$U_n > 1$".

   $U_0 = 4$ donc $\mathscr{H}_0$ est vraie.

   Soit $n \in \mathbb{N}$, si $\mathscr{H}_n$ est vraie alors pour cet entier n on a : $U_n > 1$.

   donc $f(U_n) > f(1)$ car la fonction f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

   donc $U_{n+1} > 1$ car $U_{n+1} = f(U_n)$ et $f(1) = 1$.

   donc $\mathscr{H}_{n+1}$ est vraie.

   On a démontré que $\mathscr{H}_0$ est vraie ;

   et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathscr{H}_n$ est vraie alors $\mathscr{H}_{n+1}$ aussi.

   donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{H}_n$ est vraie.

   pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 1$.

EXERCICE 2

Démontrer par récurrence que la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $V_1 = 1$ et $V_{n+1} = \dfrac{V_n}{\sqrt{V_n^2+1}}$ vérifie $V_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Soit $\mathscr{H}_n$ la proposition "$V_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$".

$V_1 = 1$ et $\dfrac{1}{\sqrt{1}} = 1$ donc $\mathscr{H}_1$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, si $\mathscr{H}_n$ est vraie alors pour cet entier n on a : $V_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

donc $V_{n+1} = \dfrac{V_n}{\sqrt{V_n^2+1}}$ or $V_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

donc $V_{n+1} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2+1}}$.

donc $V_{n+1} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{1}{n}+1}}$.

donc $V_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \times \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}+1}}$.

donc $V_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{1+n}}$.

donc $\mathscr{H}_{n+1}$ est vraie.

On a démontré que $\mathscr{H}_1$ est vraie ;

et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $\mathscr{H}_n$ est vraie alors $\mathscr{H}_{n+1}$ aussi.

donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{H}_n$ est vraie.

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.