On considère les plans $(\mathscr{P}_1)$ d'équation $2x+3y+4z=-13$ et $(\mathscr{P}_2)$ d'équation $4x-4y+z=6$

1. Montrer que les deux plans sont perpendiculaires.

   Un vecteur normal de $(\mathscr{P}_1)$ est $\overrightarrow{n_1}=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ et un vecteur normal de $(\mathscr{P}_2)$ est $\overrightarrow{n_2}=\begin{pmatrix}4\\-4\\1\end{pmatrix}$

   or $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=2\times4+3\times(-4)+4\times1=8-12+4=0$ donc les deux vecteurs normaux sont orthogonaux donc les deux plans sont bien perpendiculaires.

2. Déterminer leur droite d'intersection (d_1) en en donnant un point et un vecteur directeur.

   $M(x;y;z)$ est situé sur l'intersection de $(\mathscr{P}_1)$ et de $(\mathscr{P}_2)$ ssi ses coordonnées vérifient simultanément les deux équations.

   On résout donc $\begin{cases}2x+3y+4z=-13\\ 4x-4y+z=6\end{cases}$

   Comme il y a deux équations et trois inconnues, on doit en rejeter une comme paramètre, choisissons z

   on écrit : $\begin{cases}2x+3y=-13-4z & (L_1)\\ 4x-4y=6-z & (L_2)\end{cases}$ cela devient : $\begin{cases}2x+3y=-13-4z & (L_1)\\ 10y=-32-7z & (2L_1-L_2)\end{cases}$

   donc $\begin{cases}2x+3y=-13-4z & (L_1)\\ y=-\frac{32}{10}-\frac{7}{10}z & (2L_1-L_2)\end{cases}$ puis en reportant $\begin{cases}2x-\frac{96}{10}-\frac{21}{10}z=-13-4z\\ y=-\frac{16}{5}-\frac{7}{10}z\end{cases}$

   donc en arrangeant $\begin{cases}2x=-\frac{34}{10}-\frac{19}{10}z\\ y=-\frac{32}{10}-\frac{7}{10}z\end{cases}$ donc $\begin{cases}x=-\frac{17}{10}-\frac{19}{20}z\\ y=-\frac{16}{5}-\frac{7}{10}z\end{cases}$ C'est à dire $\begin{cases}x=-\frac{17}{10} & -\frac{19}{20}z\\ y=-\frac{16}{5} & -\frac{7}{10}z\\ z=0 & +1z\end{cases}$

   L'intersection des deux plans est la droite passant par $A(-\frac{17}{10};-\frac{16}{5};0)$ et dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix}-\frac{19}{20}\\-\frac{7}{10}\\1\end{pmatrix}$,

   pour éviter les fractions on choisira -20 fois celui là, soit $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}19\\17\\-20\end{pmatrix}$

3. Quelle est l'intersection de (d_1) avec la droite(d_2) définie par $\begin{cases}x & =1+t\\ y & =-1+2t\\ z & =2-t\end{cases}$?

   On peut tenter de résoudre directement le système formé par $\begin{cases}-\frac{17}{10} & -\frac{19}{20}z & = & 1+t\\ -\frac{16}{5} & -\frac{7}{10}z & = & -1+2t\\ & z & = & 2-t\end{cases}$

   en reportant la dernière équation dans les deux premières, cela donne :

   $\begin{cases}-\frac{17}{10} & -\frac{19}{10}+\frac{19}{20}t & = & 1+t\\ -\frac{16}{5} & -\frac{7}{5}+\frac{7}{10}t & = & -1+2t\\ & z & = & 2-t\end{cases}$ multiplions les par 10 et simplifions, cela donne $\begin{cases}\frac{-1}{2}t & = & 46\\ -13t & = & 36\\ z & = & 2-t\end{cases}$

   Les deux premières équations donne $t=-92$ et $t=-\frac{36}{13}$ ce qui n'est pas compatible.

   Le système n'a pas de solution donc l'intersection des deux droites est vide. Les droites ne sont pas coplanaires.