On considère la fonction u définie sur $]0;+\infty[$ par $u(x) = x^2 - 2 + \ln x$.

1. Déterminer les limites de u en 0_+ et en $+\infty$.

   En 0_+, on a : $\lim\limits_{x \to 0_+} x^2 - 2 = -2$ et $\lim\limits_{x \to 0_+} \ln x = -\infty$ donc par somme : $\lim\limits_{x \to 0_+} u(x) = -\infty$.

   En $+\infty$, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 2 = 6\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ donc par somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$.

2. Étudier les variations de u sur $]0;+\infty[$.

   On a : $u'(x) = 2x + \dfrac{1}{x} > 0$ donc u est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

3. Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution, que l'on notera α sur $]0;+\infty[$.

   On a : $\lim\limits_{x \to 0_+} u(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$ d'une part

   u est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ d'autre part

   donc la corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (CTVI) nous permet d'affirmer que

4. A l'aide de la calculatrice donner un encadrement à 10^{-2} de α.

   Par balayages successifs, on obtient $\alpha \approx 1,31$

5. Démontrer que $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$.

   $u(\alpha) = 0$ donc $\alpha^2 - 2 + \ln \alpha = 0$ donc $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$

   On considère alors la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2$.

6. Exprimer la dérivées de f en faisant apparaître u.

   $f'(x) = 2x + 2(2 - \ln x) \times (0 - \frac{1}{x}) = \dfrac{1}{x}(2x^2 + 4 - 2\ln x) = \dfrac{2}{x} \times u(x)$

7. En déduire les variations de f sur $]0;+\infty[$.

   Puisque u s'annule en α et est strictement croissante, elle es négative avant α et positive après α

x	0		α		$+\infty$
$u(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$\frac{2}{x}$	$\|$	$+$		$+$	
$f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	