Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^2 - 3x + 1$

   $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2x$+constante

2. $f(x) = 2(x+4)(x-5)$

   On développe avant : $f(x) = 2(x^2 - 5x + 4x - 20) = 2x^2 - 2x - 40$

   puis $F(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 40x$+constante

3. $f(x) = \dfrac{2}{3x+1}$

   On doit reconnaître la forme $\dfrac{u'}{u}$,

   ici $u(x) = 3x+1$ donc $u'(x) = 3$ mais nous avons un 2 au numérateur

   donc on doit modifier l'écriture de $f(x)$ pour intégrer

   $f(x) = \frac{2}{3} \times \dfrac{3}{3x+1}$ donc $F(x) = \frac{2}{3} \times \ln|3x+1|$+constante

4. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{3x^2+1}}$

   On doit reconnaître la forme $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$,

   ici $u(x) = 3x^2 + 1$ donc $u'(x) = 6x$ mais nous avons un x au numérateur

   donc on doit modifier l'écriture de $f(x)$ pour intégrer

   $f(x) = \frac{1}{6} \times \dfrac{6x}{\sqrt{3x^2+1}} = \frac{1}{3} \times \dfrac{6x}{2\sqrt{3x^2+1}}$ donc $F(x) = \frac{1}{3} \times \sqrt{3x^2+1}$+constante

5. $f(x) = \dfrac{3}{(2x+1)^2}$

   On doit reconnaître la forme $\dfrac{-u'}{u^2}$,

   ici $u(x) = 2x+1$ donc $u'(x) = 2$ mais nous avons un 3 au numérateur

   donc on doit modifier l'écriture de $f(x)$ pour intégrer

   $f(x) = \frac{3}{2} \times \dfrac{2}{(2x+1)^2}$ donc $F(x) = -\frac{3}{2} \times \dfrac{1}{2x+1}$+constante

6. $f(x) = 4e^{3x+1}$

   On doit reconnaître la forme $u'e^u$

   ici $u(x) = 3x+1$ donc $u'(x) = 3$ mais nous avons un 4

   donc on doit modifier l'écriture de $f(x)$ pour intégrer

   $f(x) = 4 \times \frac{1}{3} \times 3e^{3x+1} = \frac{4}{3} \times 3e^{3x+1}$ donc $F(x) = \frac{4}{3}e^{3x+1}$+constante

7. $f(x) = \sin(x)\cos(x)$

   On peut reconnaître la forme $u' \times u$ où $u(x) = \sin(x)$, on a donc $F(x) = \dfrac{1}{2}\sin^2(x)$+constante

8. $f(x) = \tan(5x)$

   Il faut se rappeler que $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ puis reconnaître la forme $\dfrac{u'}{u}$

   on a alors $F(x) = -\ln|\cos(x)|$+constante

9. $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$

   Cela ne ressemble à aucune forme amis on peut changer l'écriture

   $f(x) = \dfrac{x+1+1}{x+1} = 1 + \dfrac{1}{x+1}$

   ce qui s'intègre alors facilement en $F(x) = x + \ln|x+1|$+constante

10. $f(x) = \cos^2 x$

    Cela ne ressemble à aucune forme amis on peut changer l'écriture.

    On connaît : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$

    donc par somme : $2\cos^2 x = 1 + \cos(2x)$

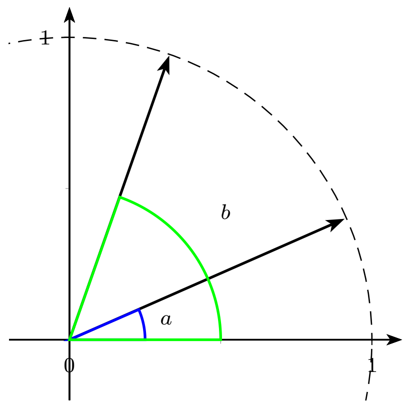
    puis $\cos^2 x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos(2x)$

    On a alors : $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)$+constante.

Rappels

si $\vec{u}\begin{pmatrix}\cos(a)\\ \sin(a)\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\cos(b)\\ \sin(b)\end{pmatrix}$

alors



• d'une part : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$

or $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ et $\cos^2 b + \sin^2 b = 1$

donc $||\overrightarrow{u}|| = ||\overrightarrow{v}|| = 1$ et $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = b - a$

donc $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 1 \times 1 \times \cos(b-a) = \cos(b-a)$

• d'autre part : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}\cos(a)\\ \sin(a)\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\cos(b)\\ \sin(b)\end{pmatrix} = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

On a établit que $\cos(b-a) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

or $\cos(-a) = \cos(a)$ et $\sin(-a) = -\sin(a)$ donc $\cos(b+a) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

donc $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

donc $\cos(2a) = \cos(a)\cos(a) - \sin(a)\sin(a)$ c'est à dire $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$