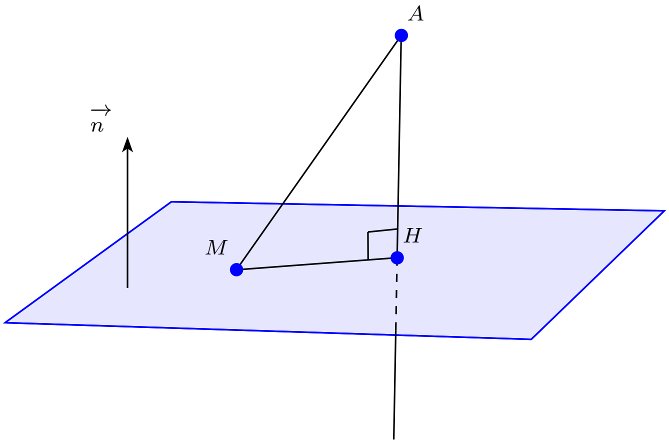
On considère la plan $(\mathscr{P})$ d'équation $x + 3y - 2z = 4$ et le point $A(5; 6; 4)$.

1. Montrer que le point A n'est pas situé sur le plan $(\mathscr{P})$.
   On a : $x_A + 3y_A - 2z_A = 5 + 18 - 8 = 15 \neq 4$ donc $A \notin \mathscr{P}$
2. Donner un vecteur normal $\vec{n}$ de $(\mathscr{P})$.
   D'après le cours : $\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$
3. En déduire un système d'équations de la droite passant $(\mathscr{D})$ par A et perpendiculaire au plan $(\mathscr{P})$.
   $M \in \mathscr{D}$ ssi $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires.
   ssi il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = k.\overrightarrow{n}$.
   ssi il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{bmatrix} x-5 \\ y-6 \\ z-4 \end{bmatrix} = k. \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$.
   ssi il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x = 5+ & k \\ y = 6+ & 3k \\ z = 4- & 2k \end{cases}$.
4. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{P})$.
   M est situé à l'intersection des deux objets ssi ses coordonnées vérifient les équations des deux objets.
   ssi $x + 3y - 2z = 4$ et $\begin{cases} x = 5+ & k \\ y = 6+ & 3k \\ z = 4- & 2k \end{cases}$
   En remplaçant dans l'équation de $(\mathscr{P})$ cela donne : $(5 + k) + 3(6 + 3k) - 2(4 - 2k) = 4$
   donc $14k = -11$ donc $k = \dfrac{-11}{14}$
   puis en remplaçant dans les équations de $(\mathscr{D})$ cela donne : $\begin{cases} x = 5+ & \frac{-11}{14} \\ y = 6+ & 3\frac{-11}{14} \\ z = 4- & 2\frac{-11}{14} \end{cases}$
   donc$x = \frac{59}{14}$ puis $y = \frac{51}{14}$ puis $y = \frac{39}{7}$
5. En déduire la distance entre A et $(\mathscr{P})$.

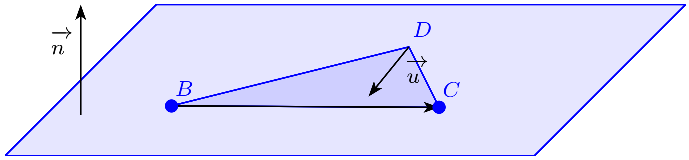


Soit un point M de $(\mathscr{P})$, distinct de M, AMH est un triangle rectangle en H d'hypoténuse AM donc $AM > AH$ donc AH est la plus petite distance entre A et le plan $(\mathscr{P})$, on l'appelle :
distance entre A et $(\mathscr{P})$

$$AH = \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2 + (y_H - y_A)^2} = \frac{11}{\sqrt{14}}$$

6. Montrer que les points $B(4;0;0)$ et $C(1;1;0)$ et $D(0;0;-2)$ sont situés sur le plan $(\mathscr{P})$.
   On a : $x_B + 3y_B - 2z_B = 4$ donc $B \in \mathscr{P}$, de même pour C et D

7. Déterminer la surface du triangle BCD.



On a : $\overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ donc (BC) a pour équations : $\begin{cases} x &= 4 & -3k \\ y &= 0 & +k \\ z &= 0 \end{cases}$

La hauteur issue de D est perpendiculaire à (BC) et dans le plan $(\mathscr{P})$, on recherche alors un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et à $\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$, par exemple $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

Ce vecteur dirige la hauteur issue de D donc cette hauteur a pour équations : $\begin{cases} x &= 0+ & \lambda \\ y &= 0+ & 3\lambda \\ z &= -2+ & 5\lambda \end{cases}$

On recherche alors l'intersection de (BC) avec la hauteur issue de D, en résolvant le système :

$$\begin{cases} 4-3k &= & \lambda \\ k &= & 3\lambda \\ 0 &= & -2+5\lambda \end{cases}$$

La 3ème ligne donne $\lambda = \frac{2}{5}$, puis la seconde donne $k = \frac{6}{5}$ et la première donne $4 - \frac{18}{5} = \frac{2}{5}$ ce qui est cohérent.

Finalement le pied de la hauteur issue de D dans BCD est $H(\frac{2}{5};\frac{6}{5};0)$

$DH = \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{36}{25} + 4} = \dfrac{2\sqrt{35}}{5}$ or $BC = \sqrt{10}$

Finalement l'aire dun triangle étant $\frac{\text{base}\times\text{hauteur}}{2}$ cela donne : aire $= \dfrac{\sqrt{10} \times \dfrac{2\sqrt{35}}{5}}{2} = \sqrt{14}$

La formule de Héron est moins connue mais plus jolie permet de vérifier.
L'aire $= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ *où a, b c sont les longueurs des trois côtés et p leur demi-somme.*
Ici les côtés mesurent $2\sqrt{5}$ *et* $\sqrt{6}$ *et* $\sqrt{10}$ *donc aire* $\approx 3,742$
or $\sqrt{14} \approx 3,742$ *ce qui est rassurant ;-)*

8. En déduire le volume du tétraèdre ABCD.

   Le volume du tétraèdre est $\frac{\text{base}\times\text{hauteur}}{3} = \dfrac{\sqrt{14} \times \dfrac{11}{\sqrt{14}}}{3} = \dfrac{11}{3}$