Calculer les limites suivantes en indiquant au moins une étape.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^2-6x+1$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 6x=+\infty$ donc c'est une forme indéterminée $\infty-\infty$, on doit donc changer d'écriture de l'expression. On a : $4x^2-6x+1=x(4x-6)+1$ par exemple or $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(4x-6)=+\infty$ donc par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} x(4x-6)=+\infty$ puis par somme avec 1, $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^2-6x+1=+\infty$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} -9e^{6x+1}$

   $\lim\limits_{x\to-\infty} 6x+1=\infty$ donc par composition avec l'exponentielle $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{6x+1}=0$ puis $\lim\limits_{x\to-\infty} -9e^{6x+1}=0$

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+5}{2x^2-5x+1}$

   $\lim\limits_{x\to-\infty} x+5=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2-5x+1=+\infty$ donc le quotient est la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$ on doit donc changer d'écriture de l'expression.

   On a : $\dfrac{x+5}{2x^2-5x+1}=\dfrac{x(1+\frac{5}{x})}{x^2(2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2})}=\dfrac{1+\frac{5}{x}}{x(2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2})}$

   or $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{5}{x})=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x(2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2})=-\infty$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+5}{2x^2-5x+1}=0$

4. $\lim\limits_{x\to0_+}\dfrac{e^{2x}-1}{x}$

   On a : $\lim\limits_{x\to0_+} e^{2x}-1=0$ et $\lim\limits_{x\to0_+} x=0$ donc on a la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, donc on peut changer l'écriture de l'expression. Ici il faut voir $\dfrac{e^{2x}-1}{x}=\dfrac{e^{2x}-e^0}{x-0}$ et interpréter ce quotient comme un taux d'accroissement de la fonction $x\mapsto e^{2x}$ en 0. Sa limite est alors le nombre dérivée de la fonction $x\mapsto e^{2x}$ en 0 (comme en 1ère quand on découvrait les dérivées). Or $(e^{2x})'=2e^{2x}$ donc en 0 cela vaut 2. On a alors : $\lim\limits_{x\to0_+}\dfrac{e^{2x}-1}{x}=2$

5. $\lim\limits_{x\to2_-}\dfrac{-5}{x^2-3x+2}$

   On a : $\lim\limits_{x\to2} x^2-3x+2=0$ donc il faut savoir si c'est 0_+ ou 0_-, pour cela on factorise. x^2-3x+2 a pour discriminant $\Delta=9-8=1$, pour racine 1 et 2 puis $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ donc $\lim\limits_{x\to2_-} x^2-3x+2=\lim\limits_{x\to2_-}(x-1)(x-2)=1\times0_-=0_-$

   or $\lim\limits_{x\to2_-} -5=-5<0$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to2_-}\dfrac{-5}{x^2-3x+2}=+\infty$

6. $\displaystyle\lim_{x\to 1_+} \frac{-5}{x^2-3x+2}$

On a : $\displaystyle\lim_{x\to 1} x^2-3x+2 = 0$ donc il faut savoir si c'est 0_+ ou 0_-, pour cela on factorise. x^2-3x+2 a pour discriminant $\Delta = 9-8 = 1$, pour racine 1 et 2 puis $x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 1_+} x^2-3x+2 = \lim_{x\to 2_-}(x-1)(x-2) = 1\times 0_+ = 0_+$

or $\displaystyle\lim_{x\to 1_+} -5 = -5 < 0$ donc par quotient $\displaystyle\lim_{x\to 1_+} \frac{-5}{x^2-3x+2} = -\infty$

7. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{5e^x}{x^2+3x+8}$

$\displaystyle\lim_{x\to +\infty} 5e^x = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^2+3x+8 = +\infty$ donc le quotient est la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$ on doit donc changer d'écriture de l'expression. On a : $\displaystyle\frac{5e^x}{x^2+3x+8} = \frac{e^x\times 5}{x^2\times(1+\frac{3}{x}+\frac{8}{x^2})}$ puis $\displaystyle\frac{5e^x}{x^2+3x+8} = \frac{e^x}{x^2}\times\frac{5}{1+\frac{3}{x}+\frac{8}{x^2}}$. On a : $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^2}$

8. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\times\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)$

$\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+4} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x = +\infty$ donc c'est une forme indéterminée $\infty-\infty$, on doit donc changer d'écriture de l'expression.

On a : $\displaystyle x\times\left(\sqrt{x^2+4}-x\right) = \frac{1}{x}\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)\times\frac{\sqrt{x^2+4}+x}{\sqrt{x^2+4}+x}$

$$= x\times\frac{(\sqrt{x^2+4})^2-x^2}{\sqrt{x^2+4}+x}$$

$$= x\times\frac{4}{\sqrt{x^2+4}+x}$$

$$= x\times\frac{4}{x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}+x}$$

$$= x\times\frac{4}{x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}+1\right)}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}+1}$$

donc $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\times\left(\sqrt{x^2+4}-x\right) = \frac{4}{2} = 2$