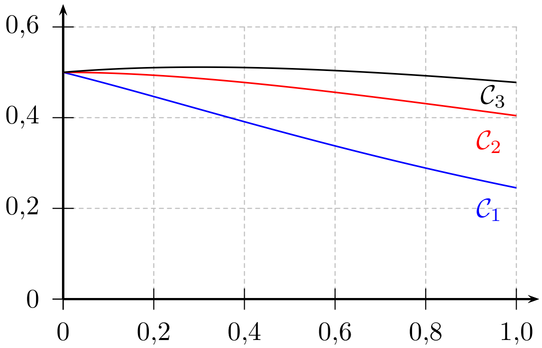
La famille de fonctions f_n est définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0\ ;\ 1]$ par $f_n(t) = \dfrac{t+1}{t+2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{n}}$.

On note $\mathcal{C}_n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la courbe représentative de la fonction f_n et on considère ensuite la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.



1. Sur le graphique suivant on a représenté les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.
   (a) Que représentent les nombres u_1, u_2 et u_3 pour les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$?
   (b) À l'aide du graphique dire quel semble être le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Pourquoi ?
2. Démontrer que le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est celui observé à la question précédente.
3. Vérifier que $\dfrac{t+1}{t+2} = 1 - \dfrac{1}{t+2}$.
4. Déterminer alors $J = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{t+1}{t+2}\,\mathrm{d}t$.
5. Montrer alors que $J\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} \leqslant u_n \leqslant J$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
6. En déduire que (u_n) est convergente. Déterminer sa limite.