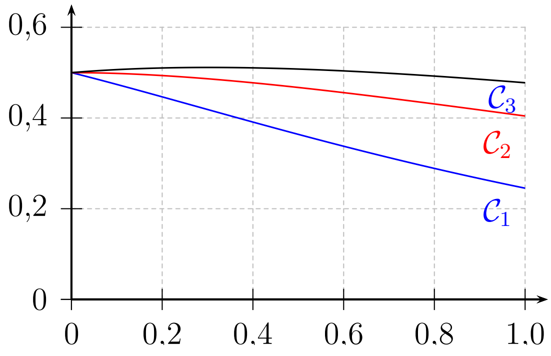
La famille de fonctions f_n est définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0\ ;\ 1]$ par $f_n(t) = \dfrac{t+1}{t+2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{n}}$.

On note $\mathcal{C}_n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la courbe représentative de la fonction f_n et on considère ensuite la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.



1. Sur le graphique suivant on a représenté les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.

   (a) Que représentent les nombres u_1, u_2 et u_3 pour les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$?

   u_1, u_2 et u_3 représentent les aires sous les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$

   (b) À l'aide du graphique dire quel semble être le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Pourquoi ?

   Il semble que plus n augmente plus les aires sous les courbes sont importantes donc la suite u semble croissante.

2. Démontrer que le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est celui observé à la question précédente.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^1 f_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$

   $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^1 f_{n+1}(t) - f_n(t)\,\mathrm{d}t$

   $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t+1}{t+2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{n+1}} - \frac{t+1}{t+2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{n}}\,\mathrm{d}t$

   $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t+1}{t+2}\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{n+1}} - \mathrm{e}^{-\frac{t}{n}}\right)\,\mathrm{d}t$

   or sur $[0;1]$, $\dfrac{t+1}{t+2} > 0$

   et $n < n+1$ donc $\frac{1}{n} > \dfrac{1}{n+1}$ donc pour $t > 0$, on a : $\frac{t}{n} > \frac{t}{n+1}$

   puis $\frac{-t}{n} > \frac{-t}{n+1}$ puis $\mathrm{e}^{\frac{-t}{n}} < \mathrm{e}^{\frac{-t}{n+1}}$ car exp est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$

   donc $\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{n+1}} - \mathrm{e}^{-\frac{t}{n}}\right) > 0$

   donc le produit $\dfrac{t+1}{t+2}\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{n+1}} - \mathrm{e}^{-\frac{t}{n}}\right)$ est positif sur $[0;1]$

   donc l'intégrale de ce produit est strictement positive.

donc la suite u est bien strictement croissante.

3. Vérifier que $\dfrac{t+1}{t+2} = 1 - \dfrac{1}{t+2}$.

   On a : $\dfrac{t+1}{t+2} = \dfrac{t+2-1}{t+2} == \dfrac{t+2}{t+2} + \dfrac{-1}{t+2} = 1 - \dfrac{1}{t+2}$

4. Déterminer alors $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{t+1}{t+2}\,\mathrm{d}t$.

   On a : $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{t+1}{t+2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 1 - \frac{1}{t+2}\,\mathrm{d}t$

   donc $J = \Big[t - \ln|t+2|\Big]_0^1 = 1 - \ln 3 - (0 - \ln 2) = 1 - \ln\frac{2}{3} \approx 0,59$

5. Montrer alors que $J\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} \leqslant u_n \leqslant J$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, sur $[0;1]$, on a : $0 \leqslant t \leqslant 1$ donc $0 \leqslant \frac{t}{n} \leqslant \frac{1}{n}$ donc $0 \geqslant \frac{-t}{n} \geqslant \frac{-1}{n}$

   donc $e^0 \geqslant e^{\frac{-t}{n}} \geqslant e^{\frac{-1}{n}}$ car exp est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$

   donc $e^{\frac{-1}{n}} \leqslant e^{\frac{-t}{n}} \leqslant 1$

   donc $\dfrac{t+1}{t+2}e^{\frac{-1}{n}} \leqslant \dfrac{t+1}{t+2}e^{\frac{-t}{n}} \leqslant \dfrac{t+1}{t+2}$

   donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{t+1}{t+2}e^{\frac{-1}{n}}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{t+1}{t+2}e^{\frac{-t}{n}}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{t+1}{t+2}\,\mathrm{d}t$

   donc $e^{\frac{-1}{n}} \times \displaystyle\int_0^1 \frac{t+1}{t+2}\,\mathrm{d}t \leqslant u_n \leqslant \int_0^1 \frac{t+1}{t+2}\,\mathrm{d}t$

   donc $e^{\frac{-1}{n}} \times J \leqslant u_n \leqslant J$

6. En déduire que (u_n) est convergente. Déterminer sa limite.

   Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{-1}{n}} = e^0 = 1$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{-1}{n}} J = J$

   d'après le théorème de double comparaison, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = J$

   La suite u est convergente et a pour limite $J = 1 - \ln\frac{2}{3} \approx 0,59$