

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par :  $f(t) = 79e^{-0,25t} - 4e^{-t}$ .

On désigne par  $C$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Sur l'axe des  $x$  l'unité est : 0,5 cm. Sur l'axe des  $y$  l'unité est : 0,25 cm.

1. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ . Que peut-on en déduire pour la courbe  $C$  ?

On sait que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,25t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0$ , donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ .

Ceci montre que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à  $C$  au voisinage de plus l'infini.

2. (a) Démontrer que pour tout  $t$  appartenant à l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  :

$$f'(t) = e^{-0,25t} (-19,75 + 4e^{-0,75t})$$

$f$  somme de fonctions dérivables est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

Puisque  $f(t) = 79e^{-0,25t} - 4e^{-t}$ , on a :  $f'(t) = 79 \times (-0,25)e^{-0,25t} + 4e^{-t}$

donc  $f'(t) = -19,75e^{-0,25t} + 4e^{-t}$  donc  $f'(t) = e^{-0,25t} (-19,75 + 4e^{-0,75t})$

- (b) Justifier que pour tout  $t$  appartenant à l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  :  $-19,75 + 4e^{-0,75t} < 0$ .

$$\text{Supposons que } -19,75 + 4e^{-0,75t} < 0 \iff 4e^{-0,75t} < 19,75$$

$$\iff e^{-0,75t} < 4,9375$$

$$\iff -0,75t < \ln 4,9375$$

$$\iff 0,75t > -\ln 4,9375$$

$$\iff t > -\frac{4}{3} \ln 4,9375 \approx -2,1.$$

Donc a fortiori pour  $t > 0$ , on a bien  $-19,75 + 4e^{-0,75t} < 0$ .

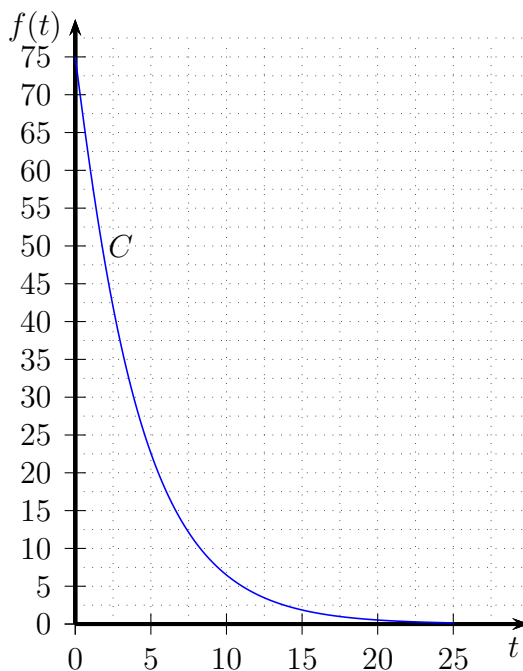
- (c) En déduire Le signe de  $f'(t)$  et le sens de variation de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .

Comme  $e^{-0,25t} > 0$  quel que soit  $t$ , la dérivée  $f'(t)$  est du signe de  $-19,75 + 4e^{-0,75t}$  donc négative sur  $[0 ; +\infty[$  : la fonction  $f$  est donc décroissante sur cet intervalle de  $f(0) = 75$  à 0.

3. (a) Compléter le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs de  $f(t)$  seront **arrondies au dixième**.

$t$	0	5	10	15	20	25
$f(t)$	75	22,6	6,5	1,9	0,5	0,2

(b) Construire la courbe  $C$  à l'aide d'un grapheur.



4. (a) Démontrer que la valeur moyenne de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; 20]$  est :

$$V_m = \frac{1}{20}(-316e^{-5} + 4e^{-20} + 312)$$

La valeur moyenne de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[a; b]$  est le nombre  $\frac{1}{b-a} \times$

$$\int_a^b f(t) dt.$$

$$V_m = \frac{1}{20-0} \int_0^{20} f(t) dt.$$

Or une primitive de  $f(t)$  sur  $[0; +\infty[$  est

$$F(t) = \frac{79}{-0,25} e^{-0,25t} + 4e^{-t} = -316e^{-0,25t} + 4e^{-t}, \text{ donc :}$$

$$\begin{aligned} V_m &= \frac{1}{20}[F(20) - F(0)] \\ &= \frac{1}{20}(-316e^{-0,25 \times 20} + 4e^{-20} - (316 + 4)) \\ &= \frac{1}{20}(-316e^{-5} + 4e^{-20} + 312). \end{aligned}$$

(b) Donner la valeur approchée de  $V_m$  arrondie au dixième.

La calculatrice donne  $V_m \approx 15,5$ .