

Une entreprise vend des lots de carrelage contenant 25 % de carreaux avec motif et 75 % de carreaux blancs.

Lors d'un contrôle qualité on observe que : 2,25 % des carreaux sont fissurés et par ailleurs : 6 % des carreaux avec motif sont fissurés.

On prélève au hasard un carreau et on note :

M l'évènement « le carreau a un motif » et F l'évènement « le carreau est fissuré ».

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.

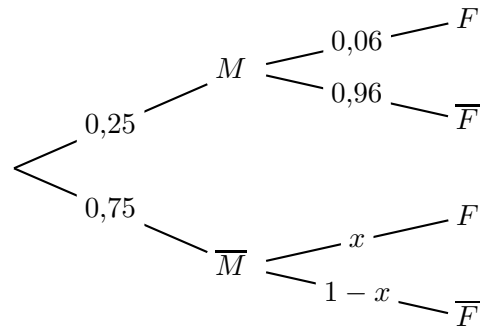
D'après l'énoncé $P(M) = 0,25$,

donc $P(\overline{M}) = 1 - 0,25 = 0,75$.

D'autre part $P_M(F) = 0,06$.

Donc $P_M(\overline{F}) = 1 - 0,06 = 0,96$.

On a alors :



2. On sait que le carreau prélevé est fissuré. Démontrer que la probabilité qu'il s'agisse d'un carreau avec motif est $\frac{2}{3}$.

Il faut trouver $P_F(M)$

$$\text{Or } P_F(M) = \frac{P(F \cap M)}{P(F)} = \frac{P(M \cap F)}{P(F)} = \frac{P(M) \times P_M(F)}{P(F)} = \frac{0,25 \times 0,06}{0,0225} = \frac{0,0150}{0,225} = \frac{150}{225} = \frac{3 \times 50}{9 \times 25} = \frac{3 \times 2 \times 25}{3 \times 3 \times 25} = \frac{2}{3}.$$

3. Calculer $P_{\overline{M}}(F)$, probabilité de F sachant \overline{M} .

Soit $x = P_{\overline{M}}(F)$.

On sait d'après la loi des probabilités totales que :

$P(F) = P(M \cap F) + P(\overline{M} \cap F)$ soit d'après l'énoncé :

$$0,0225 = 0,25 \times 0,06 + 0,75 \times x \iff 0,0225 = 0,0150 + 0,75x \iff 0,75x = 0,0075 \iff x = 0,01.$$

La probabilité qu'un carreau avec motif soit fissuré est égale à 1 %.

On modélise l'épaisseur en millimètre d'un carreau pris au hasard par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 11$ et d'écart type σ . Un carreau est commercialisable si son épaisseur mesure entre 10,1 mm et 11,9 mm. On sait que 99 % des carreaux sont commercialisables.

4. Démontrer que $P(X < 10,1) = 0,005$.

5. On introduit la variable aléatoire Z telle que $Z = \frac{X - 11}{\sigma}$.

(a) Donner la loi suivie par la variable aléatoire Z .

X est $\mathcal{N}(\mu = 11; \sigma)$ donc $X - 11$ est $\mathcal{N}(\mu = 0; \sigma)$ puis $Z = \frac{X - 11}{\sigma}$ est $\mathcal{N}(\mu = 0; 1)$

(b) Démontrer que $P\left(Z \leq -\frac{0,9}{\sigma}\right) = 0,005$.

On a donc $P(10,1 \leq X \leq 11,9) = 0,99$, donc :

$$P(X \leq 10,1) + P(X \geq 11,9) = 1 - 0,99 = 0,01.$$

Mais par symétrie $P(X \leq 10,1) = P(X \geq 11,9)$, donc

$$P(X \leq 10,1) = P(X \geq 11,9) = \frac{0,01}{2} = 0,005.$$

(c) En déduire la valeur de σ arrondie au centième.

La calculatrice, par l'intermédiaire de *invNorm* donne $\sigma \approx 0,35$ au centième près.